Пусть $f \in C[a,b]$.

Возьмем $x_1, \dots x_n \in [a,b]$; $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Обозначим $C = \dfrac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ – усреднение значений $f(x_1), \dots, f(x_n)$

Лемма 2 Если $f \in C[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$, т.ч. $f(\xi) = C$.

Д-во: Пусть $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$; $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$. Тогда $m \le f(x_k) \le M$

Умножим нер-во на λ_1, потом на λ_2 и т.д. и сложим:

$$m(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \le M(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

$\Rightarrow m \le C \le M$.

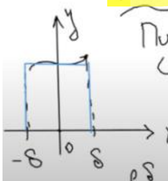
$f \in C[a,b] \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]: f(\xi) = C$. ч.т.д.

Идея: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\eta)\cdot(b-a) \approx f(\xi)\cdot(b-a) = C(b-a)$, где $=$ по 1-я т. о среднем, $C = \dfrac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$

То есть $\int_a^b f(x)\,dx = C\cdot(b-a) + R$ – остаток

Цель: подобрать $x_1, \dots, x_n$; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, чтобы R был мал.

Метод прямоугольников



Пусть $f \in C^2[a,b]$.

Рассмотрим сначала отрезок $[-\delta; \delta]$

Положим в ф-ле (1): $n = 1$, $a = -\delta$, $b = \delta$; $x_1 = 0$, $\lambda_1 = 1$. Получим

$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = f(0)\cdot 2\delta + R$ и оценим остаток.

Пусть F – любая из первообр-х для f на $[a,b]$.

Тогда $R = \int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx - 2\delta\cdot f(0) = F(\delta) - F(-\delta) - 2\delta\cdot f(0)$.

Введем вспомогательную ф-цию $\psi(x) = F(x) - F(-x)$,

тогда $\psi'(x) = f(x) + f(-x)$. Разложим ψ по ф-ле Тейлора:

$$\underbrace{\psi(\delta)}_{F(\delta)-F(-\delta)} = \underbrace{\psi(0)}_{F(0)-F(0)=0} + \underbrace{\frac{\psi'(0)}{1!}}_{2f(0)}\delta + \underbrace{\frac{\psi''(0)}{2!}}_{f'(0)-f'(0)=0}\delta^2 + \frac{\psi'''(\xi)}{3!}\delta^3, \quad 0 < \xi < \delta \Rightarrow$$

форма Лагранжа

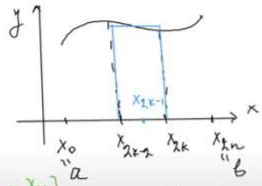
$$\Rightarrow R = \psi(\delta) - 2f(0)\cdot\delta = \frac{\psi'''(\xi)}{3!}\delta^3 = \frac{f''(\xi) + f''(-\xi)}{3!}\delta^3 =$$

$$= \underbrace{\frac{f''(\xi) + f''(-\xi)}{2}}_{\text{усреднение}}\cdot\frac{\delta^3}{3} = f''(\xi_1)\cdot\frac{\delta^3}{3}, \quad \xi_1 \in [-\delta, \delta].$$

(лемма 2 прошлой лекции)

Вернемся к отрезку $[a,b]$. Разобьем его на n равных частей: $x_k = a + \dfrac{b-a}{2n}\cdot k$, $k = 0, 1, \dots, 2n$,

тогда $x_{2k} - x_{2k-2} = \dfrac{b-a}{n}$. Получаем:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\cdot\frac{b-a}{n} + \tilde{R}, \text{ где}$$

$\xi_{2k-1} \in [x_{2k-2}, x_{2k}]$

$$\tilde{R} = R_1 + R_3 + \dots + R_{2n-1} = \left(f''(\xi_1) + f''(\xi_3) + \dots + f''(\xi_{2n-1})\right)\cdot\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= \underbrace{\frac{f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_{2n-1})}{n}}_{\text{усреднение}}\cdot\frac{(b-a)^3}{24n^2} = f''(\xi)\cdot\frac{(b-a)^3}{24n^2} = \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Геометрический смысл: криволинейную трапецию на каждом из отрезков разбиения заменяем прямоуг-ком

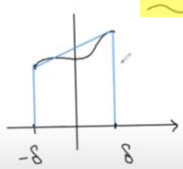
Лемма 1 (ф-ла Тейлора с ост. членом в интегральной форме)

Пусть f $(n+1)$ раз непрерывно дифф-ма в $B_\varepsilon(a)$.

Тогда $\forall x \in \mathring{B}_\varepsilon(a)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

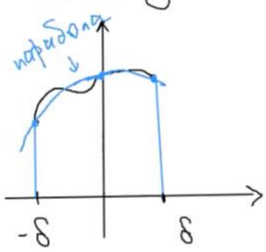
Метод трапеций



$$\tilde{R} = R_1 + \dots + R_n = -\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3\left(f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_n)\right) =$$

$$= -\frac{f''(\tilde{\xi})}{12n^2}(b-a)^3 = \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \tilde{\xi} \in [a,b]$$

Метод парабол (метод Симпсона)



Пусть $f \in C^4[a,b]$.

$$\tilde{R} = R_1 + R_3 + \dots + R_{2n-1} =$$

$$\cdot\left(\frac{b-a}{2n}\right)^5 = -\frac{f^{(4)}(\tilde{\xi})\cdot(b-a)^5}{2880\, n^4} = \underline{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$\tilde{\xi} \in [a,b]$.